

No.2 正規直交基底

この回のゴール

- 直交系・正規直交系・正規直交基底を定義し、判定できる.
- 正規直交基底に関する座標を、内積だけで求められる.
- 直交行列の定義と性質 ($Q^{-1} = {}^tQ$, 内積・長さを保つ, $\det Q = \pm 1$) を説明できる.

以下, V を内積空間とする.

1. 直交系と正規直交系

定義 1 直交系・正規直交系

V のベクトル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ について,

- どの 2 本も直交する ($i \neq j$ なら $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0$) とき, **直交系**という.
- 直交系で, しかもすべて単位ベクトルであるとき, **正規直交系**という. クロネッカーのデルタを使うと $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \delta_{ij}$ と書ける.

定理 1

$\mathbf{0}$ を含まない直交系は 1 次独立である.

【証明】 $c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$ の両辺と $\mathbf{u}_j$ の内積をとると, (I1) と直交性より $c_j(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j) = 0$. $\mathbf{u}_j \neq \mathbf{0}$ なので $(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j) > 0$ で, $c_j = 0$. □

注意

1 次独立かどうかを調べるのに, ふつうは連立方程式を解く必要があった (第 4 章 No.2). 直交系なら, 内積を 1 回とるだけで係数が 1 つずつ取り出せる. これが直交性の強みである.

定義 2 正規直交基底

V の基底 $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ が正規直交系であるとき, **正規直交基底**という.

例 1

(a) $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は, 標準内積に関する正規直交基底.

(b) $\mathbb{R}^2$ の $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(1, -1)$. $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$, $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$.

(c) $\mathbb{R}^3$ の $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}{}^t(1, 2, 2)$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{3}{}^t(2, 1, -2)$, $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{3}{}^t(2, -2, 1)$ (練習問題 1 で確かめる).

n 次元空間で n 本の正規直交系があれば, 定理 1 より 1 次独立なので, 第 4 章 No.3 定理 5 (1) より基底になる.

■ 2. 正規直交基底に関する座標

定理 2 座標は内積で求まる

$(u_1, \dots, u_n)$ を V の正規直交基底とする. 任意の $x \in V$ について

$$x = (x, u_1)u_1 + (x, u_2)u_2 + \cdots + (x, u_n)u_n.$$

つまり, x の座標は ${}^t((x, u_1), \dots, (x, u_n))$ である.

【証明】 $x = \sum_i x_i u_i$ と書けるので, 両辺と u_j の内積をとると $(x, u_j) = \sum_i x_i (u_i, u_j) = \sum_i x_i \delta_{ij} = x_j$.

□

例題 1

例 1 (b) の正規直交基底に関する $x = {}^t(3, 1)$ の座標を求めよ.

【解答】 $(x, u_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(3+1) = 2\sqrt{2}$, $(x, u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(3-1) = \sqrt{2}$. 座標は ${}^t(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$. 確認: $2\sqrt{2}u_1 + \sqrt{2}u_2 = 2{}^t(1, 1) + {}^t(1, -1) = {}^t(3, 1)$.

注意

ふつうの基底では, 座標を求めるのに連立方程式を解く (逆行列を計算する) 必要があった (第 4 章 No.3 例題 1). 正規直交基底なら内積を計算するだけで済む.

定理 3 パーセヴァルの等式

正規直交基底に関する x, y の座標を ${}^t(x_1, \dots, x_n), {}^t(y_1, \dots, y_n)$ とすると

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \quad \|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

【証明】 $(\sum_i x_i u_i, \sum_j y_j u_j) = \sum_{i,j} x_i y_j (u_i, u_j) = \sum_i x_i y_i$.

□

コラム: どんな内積も「標準内積」に見える

定理 3 は, 正規直交基底の座標で見れば, どんな内積空間の内積も $\mathbb{R}^n$ の標準内積と同じ形になることを言っている. 関数の空間でも, 正規直交系 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots$ (区間 $[-\pi, \pi]$ 上の積分による内積) に関する「座標」を考えると, それがフーリエ係数になる (分野「解析学」第 9 章 No.1).

■ 3. 直交行列

定義 3 直交行列

n 次正方行列 Q が ${}^tQQ = E$ を満たすとき, Q を直交行列という.

定理 4 直交行列の言い換え

n 次正方行列 $Q = (\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n)$ について, 次は同値である.

- (a) Q は直交行列 (${}^tQQ = E$).
- (b) Q は正則で $Q^{-1} = {}^tQ$.
- (c) Q の列ベクトル $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底.
- (d) すべての $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ について $(Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (内積を保つ).

【証明】(a) $\Leftrightarrow$ (b) : ${}^tQQ = E$ なら, 第 2 章 No.3 練習問題 5 より Q は正則で $Q^{-1} = {}^tQ$. 逆は明らか.

(a) $\Leftrightarrow$ (c) : ${}^tQQ$ の (i, j) 成分は ${}^t\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j = (\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$. これが δ_{ij} であることが (c).

(a) $\Rightarrow$ (d) : $(Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y}) = {}^t(Q\mathbf{x})(Q\mathbf{y}) = {}^t\mathbf{x}{}^tQQ\mathbf{y} = {}^t\mathbf{x}\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

(d) $\Rightarrow$ (c) : $(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = (Q\mathbf{e}_i, Q\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$. □

注意

(d) から, 直交行列は長さ ($\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$) も角度も保つ. 直交行列が表す線形変換は, 図形の形や大きさを変えない「合同変換」(原点を動かさない回転や折り返し)である.

例 2

(a) 回転行列 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ は直交行列 (2 本の列は直交する単位ベクトル).

(b) 対称移動 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ も直交行列.

(c) 例 1 (c) のベクトルを並べた $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ も直交行列. 逆行列は転置するだけで求まる.

定理 5

- (1) 直交行列 Q について $\det Q = \pm 1$.
- (2) 直交行列の積, 直交行列の逆行列は直交行列である.

【証明】(1) ${}^tQQ = E$ の行列式をとると $(\det Q)^2 = 1$ (第 3 章 No.2 定理 2・定理 4). (2) ${}^t(Q_1Q_2)(Q_1Q_2) = {}^tQ_2{}^tQ_1Q_1Q_2 = {}^tQ_2Q_2 = E$. ${}^t(Q^{-1})Q^{-1} = {}^t({}^tQ){}^tQ = Q{}^tQ = QQ^{-1} = E$. □

コラム：正規直交基底どうしの変換

$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底から別の正規直交基底への基底の変換行列（第5章 No.5）は直交行列になる．標準基底から $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ への変換行列 $Q = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)$ は定理4(c)より直交行列で，座標の変換 $\mathbf{x}' = Q^{-1}\mathbf{x} = {}^tQ\mathbf{x}$ の各成分は $(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i)$ になる．これは定理2と同じことである．

■ 練習問題

- 例1(c)の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であることを確かめ， $\mathbf{x} = {}^t(1, 1, 1)$ の座標を求めよ．また，パーセヴァルの等式が成り立つことを確かめよ．
- $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b \end{pmatrix}$ が直交行列となるような a, b をすべて求めよ．
- 直交行列 Q について， $\|Q\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ を示せ．また， Q の実数の固有値は1か-1であることを示せ．
- 2次の直交行列は，ある θ を用いて

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ．（前者は回転，後者は直線に関する対称移動を表す．）

- （考えてみよう）区間 $[-\pi, \pi]$ 上の内積 $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ について， $1, \cos x, \sin x$ は直交系であることを示し，それぞれのノルムを求めよ．

■ 練習問題の解答

- $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{1}{9}(2+2-4) = 0$, $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3) = \frac{1}{9}(2-4+2) = 0$, $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \frac{1}{9}(4-2-2) = 0$.
 $\|\mathbf{u}_i\|^2 = \frac{1}{9}(1+4+4) = 1$. 3本の正規直交系なので基底．座標は $(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1) = \frac{5}{3}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{u}_2) = \frac{1}{3}$,
 $(\mathbf{x}, \mathbf{u}_3) = \frac{1}{3}$. $(\frac{5}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 = \frac{27}{9} = 3 = \|\mathbf{x}\|^2$.
- 第2列が単位ベクトルで第1列と直交すればよい： $a^2 + b^2 = 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) = 0$. よって $(a, b) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ または $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
- $\|Q\mathbf{x}\|^2 = (Q\mathbf{x}, Q\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ (定理4(d)). $Q\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) なら $\|\mathbf{v}\| = \|Q\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\|$ より $|\lambda| = 1$.
- 第1列は単位ベクトルなので ${}^t(\cos \theta, \sin \theta)$ と書ける．第2列は第1列に直交する単位ベクトルなので $\pm {}^t(-\sin \theta, \cos \theta)$. + のとき前者，- のとき後者になる．
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx = 0$ より直交系． $\|1\|^2 = 2\pi$,
 $\|\cos x\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \pi$, 同様に $\|\sin x\|^2 = \pi$. よって $\|1\| = \sqrt{2\pi}$,
 $\|\cos x\| = \|\sin x\| = \sqrt{\pi}$.